6.4.301 Induktion $\sim \mathrm{d}A/\mathrm{d}t$

******

1 Motivation

Ein metallischer Leiter wird im homogenen stationären Magnetfeld verschoben. Durch die Lorentzkraft werden Leitungselektronen an ein Stabende verschoben, so dass sich dort eine negative Oberflächenladung aufbaut.

2 Experiment

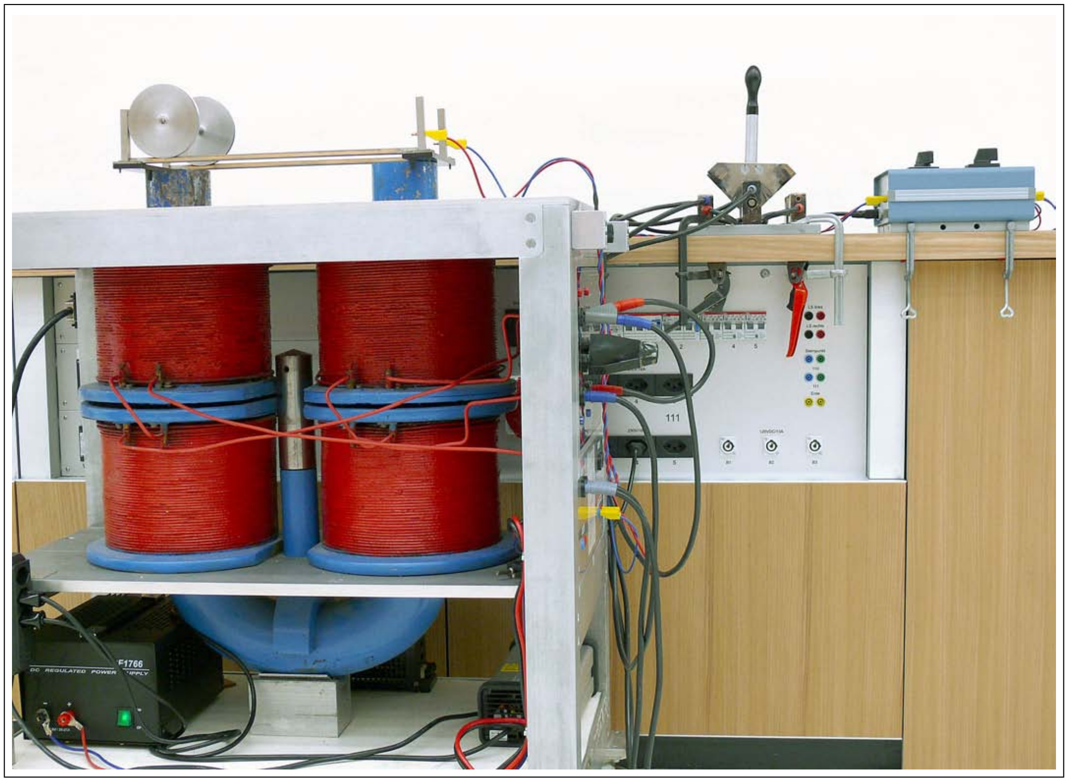

Abbildung 1: Versuchsaufbau

Zwei parallele elektrische Leiter befinden sich in einem homogenen, zeitlich konstanten Feld

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = B_0\, \boldsymbol{e}_z\,, \tag{1}$$

das senkrecht zur Leiterebene xy steht. Da der Leiterkreis offen ist, fliesst kein Strom, so dass das Magnetfeld unbeeinflusst bleibt. Ein leitender, rollbarer Bügel verbindet die parallelen Leiter miteinander (siehe Abb. 1). Wird nun der Bügel mit der Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v\, \boldsymbol{e}_x \tag{2}$$

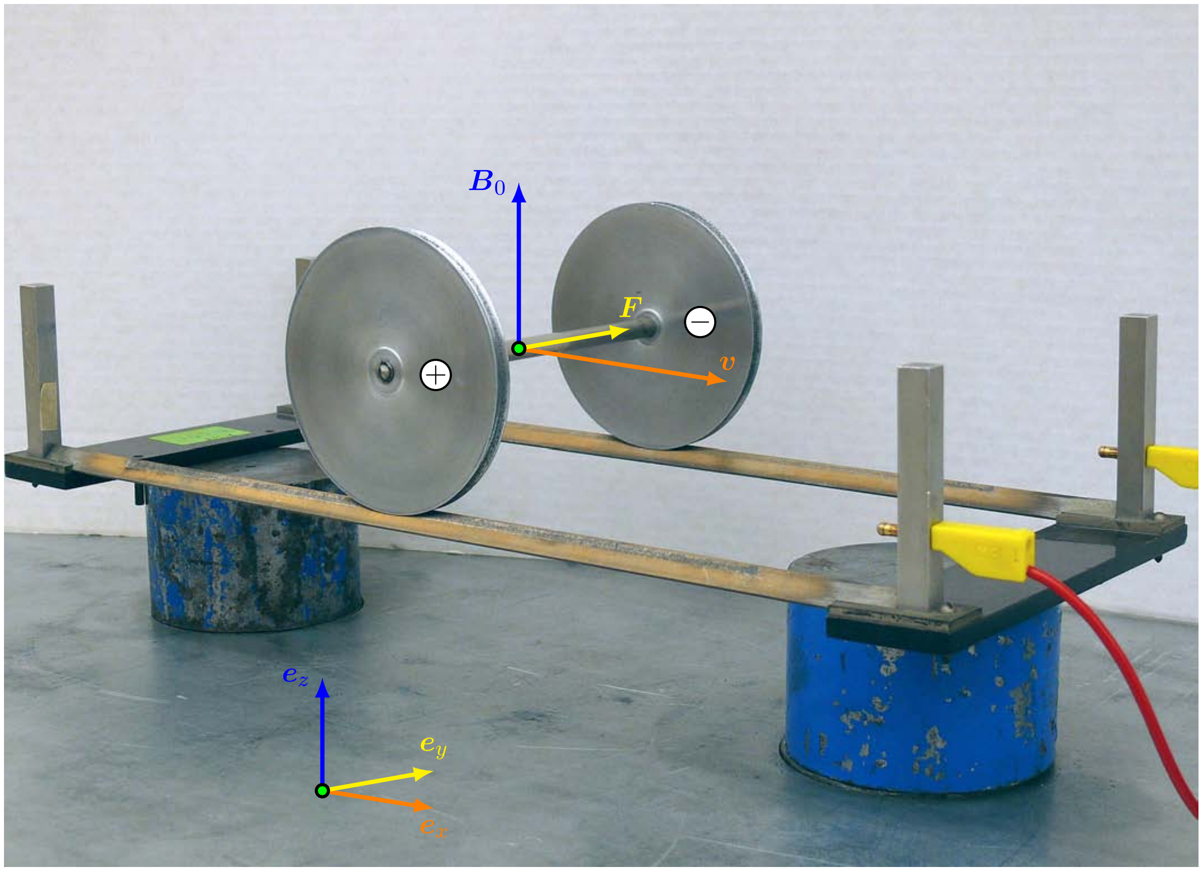

Abbildung 2: Die Lorentzkraft $\boldsymbol{F}$ verschiebt so viele (negativ geladene) Leitungselektronen nach rechts, bis das dadurch entstandene elektrische Feld eine gleich starke, aber entgegengesetzt wirkende Kraft erzeugt.

im Feld $\boldsymbol{B}_0$ bewegt, werden Leitungselektronen mit der Ladung $q = -e$ im Bügel durch die Lorentzkraft

$$\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) = evB_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = evB_0\,\boldsymbol{e}_y \tag{3}$$

zu einem Leiterende hin verschoben, und es baut sich eine negative Oberflächenladung und damit ein elektrisches Feld $\boldsymbol{E}$ so lange auf, bis die elektrische Kraft die magnetische Kraft kompensiert (siehe Abb. 2):

$$q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) + q\boldsymbol{E} := 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0) = vB_0\,\boldsymbol{e}_y \tag{4}$$

Zwischen den Bügelenden mit dem Abstand a entsteht damit die Spannung

$$U_{a(0)} = -\int_0^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_0^a (vB_0\,\boldsymbol{e}_y) \cdot (\boldsymbol{e}_y\,\mathrm{d}y) \tag{5}$$

$$= -\int_0^a vB_0\,\mathrm{d}y = -avB_0 \tag{6}$$

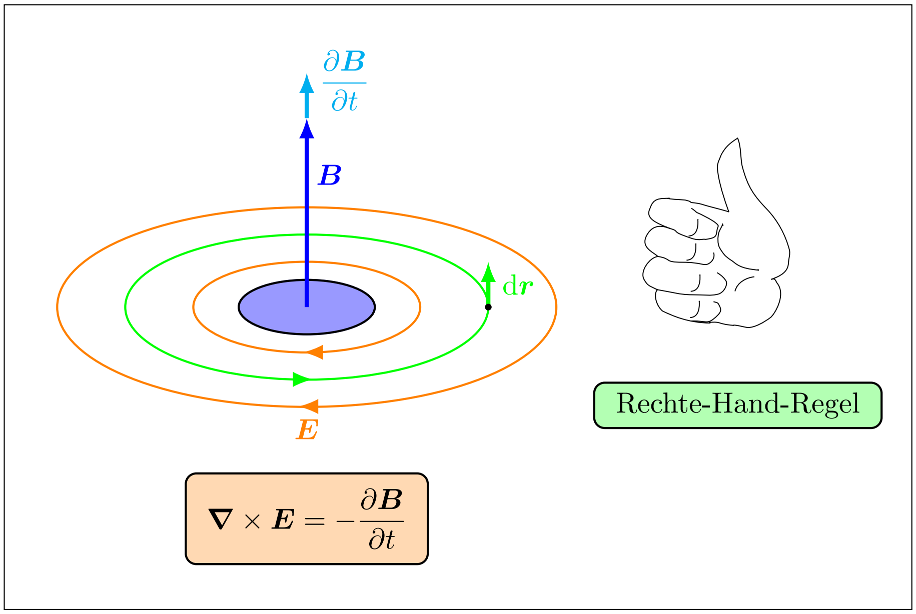

Abbildung 3: Die Richtung der induzierten $\boldsymbol{E}$-Feldes. Das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ zeigt nach oben und nimmt mit der Zeit zu.

$$U_{a(0)} = -a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}B_0 = -\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}B_0 \tag{7}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}(AB_0)}{\mathrm{d}t} = -\dot{\Phi} \tag{8}$$

Dabei ist $\mathrm{d}A = a\,\mathrm{d}x$ die in der Zeit $\mathrm{d}t$ vom Bügel überstrichene Fläche. Man beachte, dass das negative Vorzeichen in Gl. (8) hier seine Richtigkeit hat ($U = -\dot{\Phi}$), da diese Spannung nicht induziert ist, sondern sekundärer Natur ist. Sie kann sich nur deshalb überhaupt bilden, weil im Leiter Ladungen verschoben werden und diese Ladungen ein Gegenfeld aufbauen!

Die Spannung ist um so grösser, je schneller der Bügel im $\boldsymbol{B}_0$-Feld bewegt wird. Das Vorzeichen hängt von der Bewegungsrichtung ab und ist unabhängig vom Leitermaterial. Umgekehrt wirkt beim Anlegen einer Spannung U an die Leiter im Feld Bo die Lorentzkraft auf den gleitenden Bügel.

3 Theorie

3.1 Das Induktionsgesetz

Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt nach Maxwell ein elektrisches Wirbelfeld (siehe Abb. 3):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{9}$$

Wir integrieren Gl. (9) über die von der Kurve $\mathcal{C}$ umrandeten Fläche $\mathcal{A}$ und formen das Oberflächenintegral auf der linken Seite mithilfe des Stokesschen Satzes in ein Linienintegral über $\mathcal{C}$ um; beim Integral auf der rechten Seite nehmen wir an, dass sich die Geometrie zeitlich nicht ändert, so dass wir das Flächenintegral mit der Zeitableitung vertauschen können:

$$-\int\limits_{\mathcal{A}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int\limits_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad -\oint\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\mathcal{A}} \underbrace{\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}}_{\equiv \mathrm{d}\Phi} = \dot{\Phi} \tag{11}$$

Damit erhalten wir für die induzierte Spannung U_{ind}:

$$\boxed{U_{\text{ind}} = +\dot{\Phi}\,,} \tag{12}$$

wobei Φ der magnetische Fluss durch die von $\mathcal{C}$ umschlossenen Kurve ist.

In den meisten Lehrbüchern erscheint fälschlicherweise ein negatives Vorzeichen in dieser Gleichung. Um dies aber zu erreichen, wird die Spannung $U_{1(0)}$ eines Punktes (1) bezüglich eines Punktes (0) für elektrische Wirbelfelder entgegengesetzt zur Spannung in Potentialfeldern definiert:

$$\boxed{\begin{aligned} U_{1(0)} &= -\int_0^1 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{Potentialfeld} \\ U_{1(0)} &= +\int_0^1 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{Wirbelfeld} \end{aligned}} \qquad \text{Falsch!} \tag{13}$$

Zum Beweis für unsere Behauptung berechnen wir die elektrische Spannung $U_{1(0)}$ des Punktes **1** bezüglich des Punktes **0** für ein Potential- und für ein Wirbelfeld (siehe Abb. 4). Wir verwenden dazu jeweils eine positive Probeladung q, auf die ja die Kraft $\boldsymbol{F}$ in Richtung des elektrischen Feldes gemäss

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{14}$$

wirkt, was einer *negativen* Spannung entspricht.

Als Beispiel für ein Potentialfeld wählen wir das Feld eines Plattenkondensators:

$$U_{1(0)} = -\int_0^1 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} < 0 \tag{15}$$

Das Wirbelfeld werde durch die zeitliche Änderung $\dot{\boldsymbol{B}}$ der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}$ erzeugt, welche im Bild in die Zeichenebene hineinzeigt. Damit ist das induzierte $\boldsymbol{E}$-Feld entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn gerichtet. Beim Verschieben der Probeladung auf dem Kreisbogen vom Punkt **0** zum Punkt **1** gewinnt die Ladung Energie, so dass für die Spannung gilt:

$$U_{1(0)} = -\int_0^1 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} < 0 \tag{16}$$

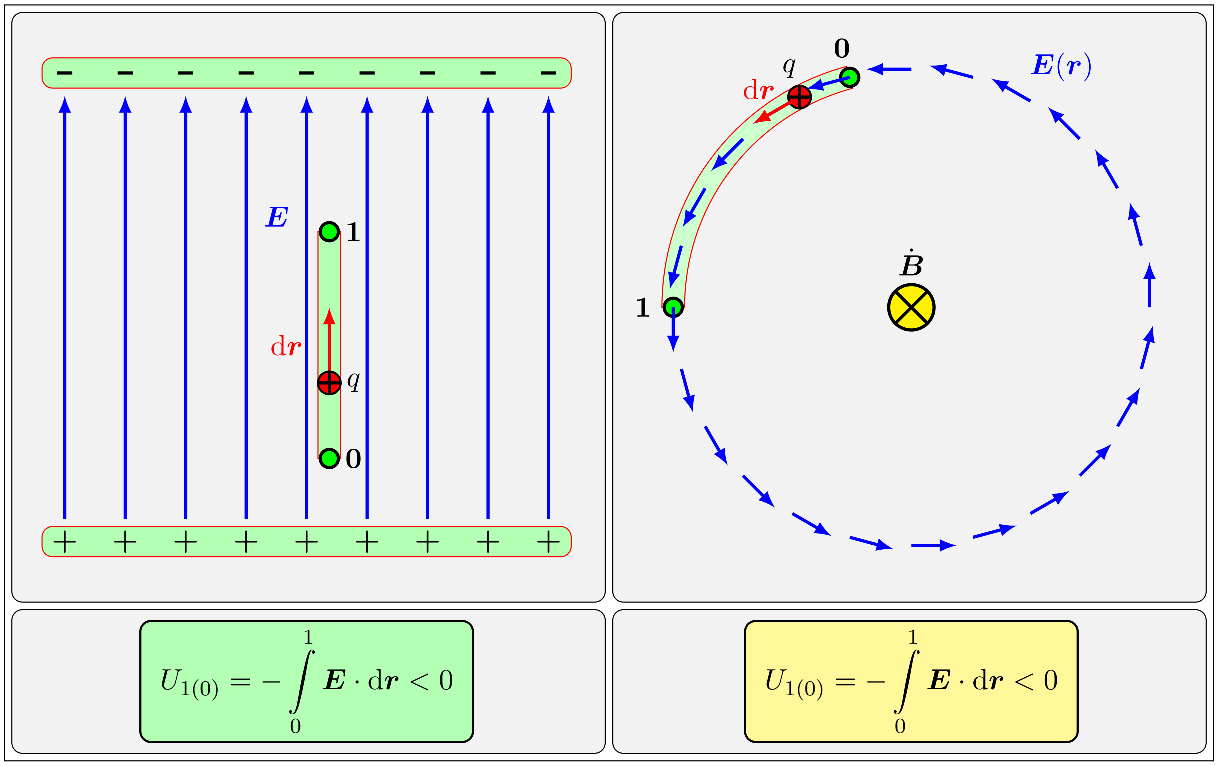

Abbildung 4: Elektrische Spannung $U_{1(0)}$ des Punktes **1** bezüglich des Punktes **0** für ein Potential- und für ein Wirbelfeld. Die zeitliche Änderung $\dot{\boldsymbol{B}}$ der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}$ zeigt in die Zeichenebene hinein. In beiden Fällen *gilt dieselbe Definition der Spannung*, die bei beiden Beispielen negativ ist, so dass die positive Ladung q beschleunigt wird und das Feld Arbeit leistet.

Wir müssen nun noch zeigen, dass für das *Ringintegral* Gln. (11) und (12) gelten. Die in Richtung des $\boldsymbol{E}$-Feldes berechnete Spannung ist

$$U_{\text{ind}} = -\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} < 0 \tag{17}$$

Der zu dieser Orientierung gehörende Flächenvektor $\boldsymbol{A}$ zeigt aus der Papierebene heraus, so dass für die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses folgt:

$$\dot{\Phi} = \dot{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{A} = -|\dot{\boldsymbol{B}}| \cdot |\boldsymbol{A}| < 0 \tag{18}$$

Aus den identischen Vorzeichen von U_{ind} und $\dot{\Phi}$ folgt schliesslich die Gültigkeit der Gl. (12).

Wenn wir nun die Integrationsrichtung in Gl. (15) umkehren,

$$U_{0(1)} = -\int_1^0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} > 0 \tag{19}$$

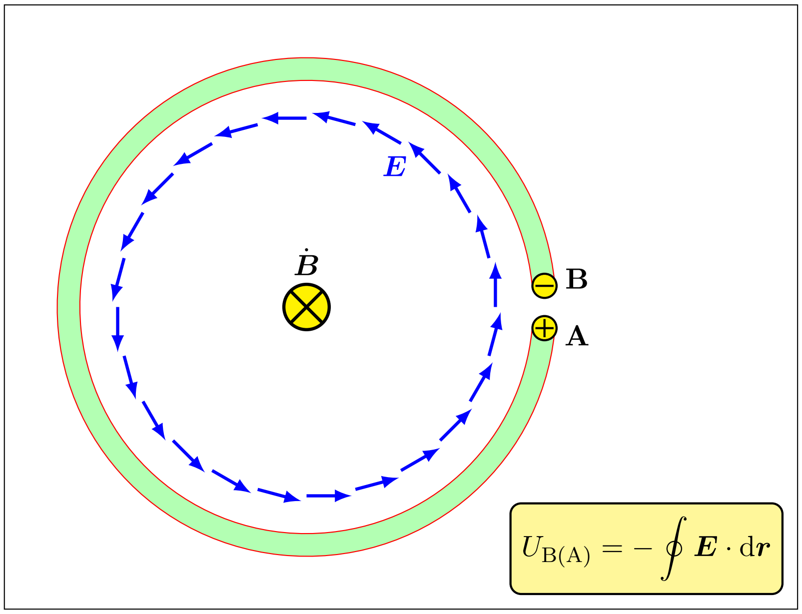

Abbildung 5: Die in der Schleife induzierte Spannung ist gleich dem Linienintegral des elektrischen Feldes über die Schleife. Das Innere der Leiterschleife ist feldfrei!

erhalten wir die positive Spannung

$$U_{0(1)} = -U_{1(0)} > 0\,, \tag{20}$$

so dass auch das Ringintegral in Gl. (17) das Vorzeichen wechselt und bei dieser Integrationsrichtung positiv wird. Nun hängt aber der Flächenvektor $\boldsymbol{A}$ als Axialvektor vom Drehsinn seiner Umrandung ab, das heisst, $\boldsymbol{A}$ wechselt ebenfalls das Vorzeichen, so dass auch der Fluss des Magnetfeldes nun positiv ist. Damit gilt unabhängig von der Integrationsrichtung

$$\boxed{U_{\mathrm{ind}} = +\dot{\Phi}} \tag{21}$$

3.2 Offene Leiterschleife im veränderlichen Magnetfeld

Wir betrachten eine Leiterschleife in einem Magnetfeld. Wir nehmen an, dass sich das Feld mit der Zeit ändert. Eine Spannung wird induziert. Siehe Abb. 5. Da die Leitungselektronen im Metall beweglich sind, werden sie im Uhrzeigersinn so lange verschoben, bis das von ihnen erzeugte elektrische Feld das äussere, induzierte Feld kompensiert. Aus diesem Grund ist der Pol **B** negativ, der Pol **A** dagegen positiv geladen. Weil das Ringintegral über den Kreis nicht verschwindet, gilt

$$U_{\mathrm{B(A)}} = -\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{22}$$

Demnach fällt die gesamte Spannung zwischen den beiden Polen ab, und die elektrische Feldstärke ist entsprechend dem Verhältnis von Polspalt zu Kreisumfang vergrössert! Da der Leiter nicht geschlossen ist, fliesst kein Strom.